

EFFECTOS DE NON TRADING Y PORFOLIO SOBRE EL TEST DE RATIO DE VARIANZA

Roberto Ortiz H, Mauricio Contreras, Marcelo Villena

RESUMEN

Se estudian los efectos combinados del trading no sincrónico y de porfolio sobre el test de ratio varianza en un escenario con muestras de tamaño finito. Los resultados muestran que dependiendo de la forma en la que se construyen los porfolios, de los valores de correlación entre los activos y de la estructura del non trading de los activos que componen el porfolio es la tasa de rechazo a la hipótesis nula de camino aleatorio. Aun cuando las rentabilidades provengan de activos individuales sin autocorrelación los efectos combinados de trading no sincrónico y de porfolio inducen autocorrelaciones positivas cuando la correlación entre activos es positiva. Estos resultados pueden explicar las diferencias empíricas encontradas entre el rechazo a la hipótesis de camino aleatorio para los índices igualmente ponderados y su no rechazo para los índices ponderados por valor de mercado.

Palabras clave: Eficiencia de mercado, autocorrelación de índices, ratio de varianzas, trading no sincrónico.

INTRODUCCIÓN

El que las diferencias de los logaritmos de los precios de los activos financieros (rentabilidades compuestas continuamente) sigan un camino aleatorio sigue siendo una de las preguntas a responder esenciales para las finanzas. Esto debido a que el proceso seguido por las rentabilidades es clave para la determinación de las estrategias óptimas de inversión. Por ejemplo, para el caso de un inversionista con un horizonte de inversión determinado, que invertirá su dinero y lo mantendrá sin realizar aportes ni retiros, y que tiene una función de utilidad tipo potencia con aversión relativa al riesgo constante, se puede afirmar lo siguiente: si las rentabilidades siguen un camino aleatorio las estrategias de inversión óptimas serán, en general, estrategias de inversión que mantienen la proporción de riqueza invertida en cada activo constante. Sin embargo, si no siguen un camino aleatorio existirá algún grado de predictibilidad, el que al ser superior a cierto nivel, se justificará la utilización de estrategias activas de inversión

que busquen aprovechar al máximo esta predictibilidad en las rentabilidades (ver, por ejemplo, (Merton R. , 1969) y (Samuelson, 1969)).¹

La hipótesis de camino aleatorio provee un medio de probar la eficiencia de mercados en su forma débil y, por lo tanto, de no predictibilidad (Fama, 1970) y (Fama, 1991). Existen diferentes formas de probar la hipótesis de camino aleatorio. Sin embargo, han ido ganando reconocimiento aquellos test que realizan supuestos cuyos resultados esperados están más cercanos a las observaciones de las características empíricas de las rentabilidades de los activos financieros. Por ejemplo, (Lo & MacKenlay, 1988) consideran que la varianza de las rentabilidades pueda variar en el tiempo de acuerdo a un proceso tipo ϕ -mixing que incluye procesos con volatilidad condicional tipo GARCH (White, 1980).

Explícitamente si tenemos una serie de observaciones de los logaritmos de precios $\{X_t\}_{t=1}^T$ la hipótesis de camino aleatorio RWH corresponde a que $\phi = 1$ en el modelo auto regresivo de primer orden

$$X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Donde μ es un parámetro de tendencia desconocido y los términos de error ε_t son, en general, ni independientes ni idénticamente distribuidos (Charles & Darné, 2009).

Se han desarrollado muchos test estadísticos para evaluar la hipótesis de camino aleatorio, sin embargo, el test de ratio de varianza (VR) ha ganado adhesión en las últimas décadas (ver, por ejemplo, (Lo & MacKenlay, 1988), (Campbell , Lo, & Mackinlay, 1997)).

En Lo & MacKenlay (1988) se concluyó la hipótesis nula de camino aleatorios era rechazada para los principales índices accionarios de la bolsa de Nueva York. Sin embargo, al aplicar este test, utilizando datos recientes, ha llamado la atención que las series de tiempo de dos de los más importantes índices accionarios de la Bolsa de Nueva York, CRSP NYSE AMEX Value Weighted y CRSP NYSE AMEX Equally Weighted, entreguen diferentes resultados a los test de camino aleatorio. No obstante que ambos índices están compuestos por los mismos activos financieros. Para el índice CRSP NYSE AMEX Equally Weighted la hipótesis de camino aleatorio es rechazada, mientras que para la el índice CRSP NYSE AMEX Value Weighted la hipótesis nula no es rechazada.

¹ La predictibilidad a la cual se hace referencia es la que podría permitir predecir un cambio en la rentabilidad esperada. Lo que desplazaría la función de densidad marginal en un instante dado hacia arriba o hacia abajo dependiendo del valor observado de alguna variable predictiva. Un cambio en el valor esperado de la rentabilidad, en un instante dado, haría conveniente cambiar la composición del portafolio óptimo. Esto haría que la composición del portafolio se fuese ajustando en el tiempo a los cambios en los valores de la variable predictiva. También haría cambiar la proporción invertida en cada activo dado que se anticipan cambios esperados en los valores de las rentabilidades esperadas. Esto genera un efecto horizonte de inversión que hace que las estrategias de inversión sean distintas para diferentes horizontes de inversión (Barberis, 2000) y (Campbell & Viceira, 1999).

En este artículo se trata de explicar los motivos que causan esta diferencia. Se plantea la tesis de que estos resultados podrían ser explicados por el efecto combinado de trading no sincrónico, de la forma en la que se construyen los portafolios y de realizar inferencias con muestras de tamaño finito.

Para lograr el propósito arriba señalado, se realiza el ejercicio de modelar y simular el efecto de non trading y de portafolio comprobando si la combinación de estos factores explica esta diferencia. Los resultados muestran que los efectos combinados de una fuerte correlación positiva entre los activos contenidos en un índice y el tener activos en un portafolio con trading no sincrónico inducen a un rechazo de la hipótesis nula para algunos portafolios. La autocorrelación positiva en algunos de los índices es producida por el proceso de actualización de rentabilidades del activo con problemas de non trading (o menos transado) respecto a las rentabilidades del activo sin problemas de non trading. Este trading no sincrónico produce una autocorrelación cruzada positiva, entre las rentabilidades de los activos, que provoca que para algunos índices su autocorrelación sea significativamente mayor que cero. Esto es observado aun cuando los procesos implícitos generadores de rentabilidades sigan por definición caminos aleatorios.

El desarrollar este estudio a través de un proceso de simulación de Montecarlo permite mostrar los efectos de portafolio y de trading no sincrónico para una amplia variedad de valores en los parámetros como son la correlación entre activos y la composición de los portafolios. Todo esto en un contexto en el que se utilizan muestras de tamaño finito.

En forma similar a lo encontrado en Boudoukh, Richardson, & Whitelaw (1994) se encuentra que la autocorrelación inducida aumenta con la heterogeneidad de los activos que componen un portafolio. Se muestra que la autocorrelación inducida en un portafolio compuesto con seis activos en rentabilidades semanales puede alcanzar valores superiores a un 20% para algunos portafolios y cero autocorrelación para otros. Estos resultados pueden avalar la explicación de que el rechazo a la hipótesis nula en los índices accionarios igualmente ponderados se debe a un efecto combinado de portafolio y de trading no sincrónico.

El artículo se estructura de la siguiente forma. Primero se aplica el test VR a los índices NYSE Value Weighted y NYSE Equally Weighted, para un período más extenso y con datos más actualizados, cubriendo todas las semanas desde 1950 al 2014. Posteriormente, se modelan los efectos combinados de non trading y portafolio en el test VR. Finalmente se discuten los principales resultados del experimento, dándole sentido al por qué el efecto non trading y portafolio son determinantes en el test.

MARCO TEÓRICO

Test de ratio varianza

El test de VR está construido bajo el supuesto que las series son estacionarias y la hipótesis nula de que rentabilidades compuestas continuamente $[r_t = X_t - X_{t-1}]$ no manifiestan auto-correlaciones lineales significativamente diferentes de cero, y en consecuencia, la varianza de la suma de las rentabilidades de k periodos debe ser igual a k veces la varianza de un periodo. Por ejemplo, considere la rentabilidad acumulada de dos periodos $r_{2t} = r_t + r_{t-1}$, el ratio de varianza para dos periodos será calculado como:

$$VR(2) = \frac{V(r_{2t})}{2V(r_t)} = \frac{V(r_t) + V(r_{t-1}) + 2Cov(r_t, r_{t-1})}{2V(r_t)} \quad (2)$$

Y si el proceso es estacionario $V(r_t) = V(r_{t-1})$ y $\rho_1 = \frac{Cov(r_t, r_{t-1})}{V(r_t)}$

Luego, el ratio de varianza para dos periodos es

$$VR(2) = 1 + \rho_1$$

En general, para k periodos se tiene que el ratio de varianza se puede calcular como:

$$VR(k) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{k}\right) \rho_i \quad (3)$$

El test de VR está basado en la idea de que cuando las rentabilidades no están linealmente correlacionadas en el tiempo, se debería observar que $V(r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1}) = kV(r_t)$ y, entonces, el ratio de varianza, $VR(k)$, es igual a 1. También se puede pensar el test de VR como un test cuya especificación o hipótesis nula es $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0$ y, entonces, las rentabilidades están serial mente no correlacionadas.

Si las auto-correlaciones lineales son mayores que cero, el ratio de varianza es mayor que uno; y, si las auto-correlaciones son negativas, el ratio de varianza es menor que uno. Los test de ratio de varianza buscan determinar si los estadísticos de $VR(k)$ son estadísticamente diferentes de uno.

Para calcular el estadístico del ratio de varianza en base a datos muestrales se debe calcular

$$VR(k) = \frac{\hat{\sigma}^2(k)}{\hat{\sigma}^2(1)k} \quad (4)$$

Donde $\hat{\sigma}^2(1)$ es el estimador insesgado de la varianza de un periodo que es estimado como

$$\hat{\sigma}^2(1) = \frac{1}{(T-1)} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{(T-1)} \sum_{t=1}^T (X_t - X_{t-1} - \hat{\mu})^2 \quad (5)$$

Donde $\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$ es una estimación de la media.

Se estima la varianza de k periodos dividida por k como

$$\frac{\hat{\sigma}^2(k)}{k} = \frac{1}{m} \sum_{t=k}^T (r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1} - k\hat{\mu})^2 = \frac{1}{m} \sum_{t=k}^T (X_t - X_{t-k} - k\hat{\mu})^2 \quad (6)$$

Donde $m = k(T - k + 1)(1 - \frac{k}{T})$. El valor de m es escogido de tal forma que $\hat{\sigma}^2(k)$ es un estimador insesgado de la varianza de k periodos cuando σ_t^2 es constante en el tiempo.

Para considerar que las r_t pueden exhibir heterocedasticidad condicional, Lo y MacKinlay (1988) proponen un estadístico robusto a heterocedasticidad $M_2(k)$

$$M_2(k) = \frac{VR(k) - 1}{\theta(k)^{1/2}} \quad (7)$$

Donde

$$\hat{\theta}(k) = \sum_{j=1}^{k-1} \left[\frac{2(q-j)}{q} \right]^2 \hat{\delta}(j) \quad (8)$$

Y

$$\hat{\delta}(j) = \frac{nq \sum_{k=j+1}^{nq} (X_k - X_{k-1} - \hat{\mu})^2 (X_{k-j} - X_{k-j-1} - \hat{\mu})^2}{\left[\sum_{k=j+1}^{nq} (X_k - X_{k-1} - \hat{\mu})^2 \right]^2} \quad (9)$$

El estadístico $M_2(k)$ asintóticamente tiene distribución normal estándar.

El test de ratio de varianza toma una crucial importancia con el trabajo de (Lo & MacKenlay, 1988). La relevancia yace sobre el hecho de que al aplicar este test a rentabilidades semanales que cubren 1216 semanas, que van desde el 6 de septiembre de 1962 al 6 de diciembre de 1985, encontraron que la hipótesis nula de camino aleatorio era rechazada para los índices CRSP NYSE AMEX Equal Weighted y CRSP NYSE AMEX Value Weighted. El rechazo era debido a auto correlación positiva para ambos índices, aunque para el índice ponderado por valor de mercado la fuerza del rechazo a la hipótesis nula era menor intensidad que para el índice igualmente ponderado.

Como se dijo anteriormente, el resultado tiene mucha importancia en la determinación de estrategias óptimas de selección de portafolios de inversión. En consecuencia, este hallazgo

refuerza la postura de buscar de estrategias de inversión activas que aprovechen la eventual predictibilidad de las rentabilidades. Sin embargo, con el paso del tiempo la evidencia empírica ha ido quitando sustento a esta tesis.

Al aplicar este test a un set de datos más extensos y actuales del índice CRSP NYSE AMEX Value Weighted se manifiesta un creciente no rechazo a la hipótesis nula a partir de fines de la década de los 90's, aunque para el índice CRSP NYSE AMEX Equal Weighted la hipótesis nula sigue rechazándose con fuerza.

Considerando lo anterior, y dado que los índices ponderados por valor de mercado son considerados más próximos a los portafolios óptimos diversificados (que se recomienda utilizar a los inversionistas) que los índices igualmente ponderados (que normalmente se consideran lejanos a los portafolios de inversión óptimos), la tesis de que las rentabilidades de las acciones siguen un camino aleatorio vuelve a tomar fuerza.

Los cuadros 1 y 2 muestran los resultados de aplicar el test de VR utilizando datos recientes. Estos consideran observaciones semanales que cubren un periodo que va desde el 7 de enero de 1950 hasta el 28 de marzo de 2013. Cómo se puede apreciar en los cuadros 1 y 2, la hipótesis nula de camino aleatorio no es rechazada para el índice CRSP NYSE AMEX Value Weighted y si es rechazada para el índice CRSP NYSE AMEX Equal Weighted, confirmando los hallazgos de (Lo & MacKenlay, 1988) para un período más reducido. La evolución del cambio en los resultados del test de ratio de varianza aplicados al índice CRSP NYSE AMEX Value Weighted son documentados en detalle en Ortiz, Contreras, y Villena (2014).

Cuadro 1

Variance ratio test for CRSP NYSE AMEX Value Weighted				
	Number k of observations aggregated to form variance ratio			
	2	4	8	16
Ratio VR(k)	1.0132	1.0716	1.115	1.1202
Statistic M2(k)	0.4053	1.2321	1.3199	0.98
Critical value	1.96	1.96	1.96	1.96
p-value	0.6853	0.2179	0.1869	0.3271

Fuente: Elaboración Propia

Cuadro 2

Variance ratio test for CRSP NYSE AMEX Equal weighted				
	Number k of observations aggregated to form variance ratio			
	2	4	8	16

Ratio VR(k)	1.2295	1.5243	1.8186	1.9693
Statistic M2(k)	6.305	8.1302	8.5506	7.2269
Critical value	1.96	1.96	1.96	1.96
p-value	0.00	0.00	0.00	0.00

Fuente: Elaboración Propia

¿Cuáles son las causas que provocan estas diferencias en los resultados del test de VR si los activos que componen estos índices son los mismos?

Aun cuando ambos índices contienen los mismos activos, se construyen de forma diferente. El índice igualmente ponderado considera el impacto de las rentabilidades de cada activo individual por igual para todos los activos que lo componen. En cambio el índice ponderado por valor considera el impacto de las rentabilidades de los activos individuales dependiendo del valor de mercado del patrimonio. Esto significa que para el índice igualmente ponderado el impacto de las variaciones de precios de las empresas pequeñas, que son más numerosas, es mucho mayor. Por lo tanto, los resultados pueden provenir de las diferentes características entre las acciones de empresas pequeñas y las de las empresas grandes.

Por otro lado, hay que considerar que la evidencia empírica muestra diferentes resultados al aplicar el test de ratio de varianza a activos individuales que al hacerlo a índices. No obstante que los índices presentan auto correlación positiva o nula, los activos individuales manifiesten auto correlación levemente negativa o nula. Por ejemplo, (Campbell , Lo, & Mackinlay, 1997, págs. 72-73) reportan la aplicación del test de VR a 411 rentabilidades de activos individuales considerando un período de 1695 semanas. Ellos encuentran que los ratio de varianza promedio de los 411 activos financieros individuales son levemente menores que uno. Para toda la muestra la auto-correlación promedio es -4% , y para las 100 compañías más pequeñas -5% . Sin embargo, ellos encuentran que éstas auto correlaciones son no significativamente distintas de cero.

Además de lo anterior, se ha observado que los portafolios igualmente ponderados de acciones de pequeñas empresas muestran auto correlaciones positivas de mayor valor que las de los portafolios igualmente ponderados de acciones de empresas de tamaño mayor (ver, por ejemplo, (Campbell , Lo, & Mackinlay, 1997, págs. 70-71)).

Las características empíricas observadas anteriormente podrían ser explicadas en principio de tres formas distintas:

- Que las rentabilidades de las empresas pequeñas sean predecibles y que las rentabilidades de acciones de empresas grandes no.
- Que las rentabilidades de las acciones grandes y pequeñas tengan autocorrelaciones con diferentes signos y que estas se anulen para el caso del índice NYSE Value Weighted y que su efecto neto sea positivo para el índice NYSE Equally Weighted.

- Que esta diferencia sea provocada por el efecto conjunto del non trading de las acciones pequeñas y el efecto porfolio.

SOBRE LOS EFECTOS DEL NONTRADING Y PORTFOLIO EN EL TEST VR

En esta sección exploramos la posibilidad de que la explicación a esta diferencia en el test VR provenga de los efectos combinados de non trading y porfolio.

Los efectos del non trading y del nonsynchronous trading

El non trading es el efecto que surge cuando una serie de tiempo, usualmente de precios, es registrada entre intervalos de tiempo de un lapso fijo y cuando los intervalos en los cuales las transacciones efectivamente ocurren son menor y por cierto irregulares. Por ejemplo, en series de precios diarios normalmente el precio diario que se registra es el precio de cierre, este precio normalmente es el precio al cual se realizó la última transacción durante ese día (que generalmente no ocurre en el momento de cierre de transacciones) y, además, si durante ese día no hay transacciones de este activo, el precio de cierre registrado para ese día es el mismo precio de cierre del día anterior.

El efecto de trading no sincrónico se produce debido a que en una serie multivariada las transacciones o movimientos de los precios se producen en distintos instantes en el tiempo. La consideración de estos efectos del non trading y trading no sincrónicos son reportados a partir de (Fisher, 1966). En este artículo, por primera vez, se hace referencia a que dos activos financieros rara vez se transan simultáneamente.

El non trading de un activo individual y el hecho de que los activos individuales registren sus cambios de precios en forma no sincronizada (trading no sincrónico) pueden alterar las estimaciones de, por ejemplo, auto correlaciones de activos individuales o auto correlaciones cruzadas entre activos individuales, entre otros efectos. Además, el suponer que los precios de una serie corresponden a precios tomados en instantes iguales puede crear la falsa impresión de predictibilidad en los precios, aun cuando los cambios en los precios sean estadísticamente independientes. Ver, por ejemplo (Mech, 1993), (Perry , 1985), (Campbell , Lo, & Mackinlay, 1997); (Lo & MacKinlay, 1990)).

A partir de los trabajos de Fisher (1966) y Scholes & Williams (1977) se ha considerado que el trading no sincrónico puede inducir autocorrelación positiva en portfolios o índices accionarios. Se han encontrado que las rentabilidades de los portfolios igualmente ponderados compuestos mayoritariamente por acciones de firmas pequeñas manifiestan mayor autocorrelación que los portfolios compuestos de acciones de firmas de mayores tamaños (Atchinson, Butler, & Simonds, 1987), (Perry , 1985), y (Cohen, Hawawini, Mayer, Schwartz, & Whitcomb, 1983). Se han propuesto modelos para estimar la autocorrelación teórica debida solamente al trading no sincronizado generada en los índices bursátiles, encontrándose, en la mayoría de los estudios, que esta es considerablemente menor a la observada y que, por lo tanto, este efecto no explicaría el rechazo a la hipótesis nula de camino aleatorio (Atchinson, Butler, & Simonds, 1987), (Conrad

& Kaul, 1988), (Lo & MacKinlay, 1990), y (Mech, 1993). Se han utilizado modelos que han buscado determinar el impacto que tiene el trading no sincrónico sobre los valores esperados de los parámetros de los activos individuales como la media, varianza, covarianza y correlaciones. Específicamente, en Lo & MacKinlay (1990) y Lo & MacKenlay (1988) se busca determinar si el trading no sincrónico puede conducir al rechazo de la hipótesis nula de camino aleatorio. Estos autores concluyen que este efecto es muy pequeño para provocar el rechazo de la hipótesis nula. Cabe señalar que estos autores estiman conductas asintóticas de los parámetros, suponen como válido un modelo específico de precios, consideran activos individuales de características homogéneas, y el non trading de los activos individuales es el mismo para cada activo. Por otro lado, Boudoukh, Richardson, & Whitelaw (1994) utilizando el modelo de Scholes & Williams (1977) estiman la autocorrelación teórica inducida por el trading no sincrónico permitiendo que las características de los activos individuales considerados en los portafolios sean heterogeneas y que las probabilidades de non trading individuales varíen entre activos. Ellos encuentran que la autocorrelación inducida por el trading no sincrónico a las rentabilidades semanales de portafolios igualmente ponderados puede llegar a alcanzar un 17,82%.

En todos los estudios señalados se estiman conductas asintóticas y se asume los portafolios considerados son eficientes y que, por lo tanto, contienen solo riesgo sistemático. Sin embargo, en la práctica la inferencia estadística se realiza con muestras de tamaño finito donde los valores de los parámetros son estimados con errores y el supuesto de que un modelo de precios es verdadero, aunque simplifica el análisis, hace depender los resultados de la inferencia de la veracidad del modelo.

El efecto portafolio

Las propiedades de un índice dependen del proceso multivariado seguido por los activos financieros que lo componen y de la ponderación individual que se asigna a cada uno de los activos. Considere el típico caso en que se asume que las rentabilidades siguen un proceso normal multivariado $N(\mu, V)$ donde μ es el vector de rentabilidades esperadas de los activos y V es la matriz de covarianzas entre los activos. En cualquier análisis la estimación de los parámetros es clave. Cuando existe trading no sincrónico se adiciona al problema del riesgo de estimación con muestra finita, el sesgo inducido a los valores estimados de los parámetros. En resumen, cuando existe trading no sincrónico se detectan auto-correlaciones cruzadas entre activos aunque la correlación subyacente entre activos es solamente contemporánea (Fisher, 1966). Este efecto se agudiza cuando el intervalo de observación disminuye. Se ha reportado que cuando el periodo de observación disminuye acercándose a cero, las correlaciones entre activos tienden a cero (Epps, 1979).

Diversos estudios han indagado respecto a la incidencia que puede tener el trading no sincrónico sobre la autocorrelación de portafolios. Inicialmente fue advertido el efecto que el trading no sincrónico induce a una subestimación de los betas de los activos financieros. Esto es mostrado en Scholes & Williams (1977), Dimson (1979), y Cohen, Hawawini, Mayer, Schwartz, &

Whitcomb (1983). También ellos proponen métodos para mitigar este efecto. Posteriormente Atchinson, Butler, & Simonds (1987), y Lo & MacKinlay (1990) estiman la autocorrelación inducida en los portafolios por trading no sincrónico y encuentran que esta es significativamente menor a la observada. Específicamente, Atchinson et al (1987) encuentran que la autocorrelación inducida por el non trading es 4% para el índice NYSE equal weighted y 2% para el índice NYSE value weighted. Los valores de la autocorrelación observados eran 28% para el NYSE Equal Weighted y 16% para el NYSE Value Weighted. Similares resultados son reportados por Lo & MacKinlay (1990). Sin embargo, Boudoukh, Richardson, & Whitelaw (1994) consideran el modelo de Lo & MacKinlay (1990) en forma más general para estimar valores de la autocorrelación inducida por el non trading significativamente mayores (de hasta 17,82%). Específicamente, ellos permiten que los betas de los activos considerados sean heterogéneos, que las probabilidades de non trading de cada activo sean diferentes, y que la probabilidad de non trading cambie para diferentes periodos. Las estimaciones de Lo & MacKinlay (1990) se realizaron suponiendo valores homogéneos para cada uno de los factores mencionados arriba.

Los modelos mencionados arriba consideran estimar las autocorrelaciones asintóticas de los portafolios asumiendo que los portafolios contienen infinitos activos y que están completamente diversificados. Recientemente, Chelley & Steeley (2014) han investigado los efectos del non trading considerando que el número de activos incluidos en los portafolios es finito. Ellos encuentran que la autocorrelación inducida por el non trading es influida por riesgos no sistemáticos.

METODOLOGÍA

Estrategia de Modelado para la simulación de los efectos de trading y portfolio en el test VR

En este artículo se propone un modelo simple que permita explicar las diferencias de comportamiento de los índices igualmente ponderados y ponderados por valor. Para este propósito se considerarán los efectos del non trading, trading no sincrónico y de portfolio.

La idea del enfoque propuesto es estudiar estos fenómenos considerando la problemática de la inferencia que se debe realizar con muestras de tamaño finito y sin suponer la validez de algún modelo de precios de equilibrio. Se supone que las rentabilidades compuestas continuamente de un set de activos financieros individuales siguen un proceso con distribución normal multivariado. A las rentabilidades individuales generadas se les introduce el efecto de non trading y posteriormente se analizan los efectos que el non trading tiene sobre el test de ratio de varianzas de diferentes portafolios. A continuación se explica cómo se aplica este enfoque.

Para capturar el efecto de trading no sincrónico utilizamos el enfoque similar al presentado en (Lo & MacKinlay, 1990); con la diferencia que no se estiman conductas asintóticas sino que se considera la problemática real de realizar inferencias utilizando muestras de tamaño finito.

Se supone que existe una serie de rentabilidades compuestas continuamente para cada activo individual i en cada periodo t , $r_{i(t)}$ las cuales son observables solamente cuando el activo se transa. Estas se denominarán rentabilidades virtuales. Estas rentabilidades virtuales son las que se observarían si el activo se transara regularmente en cada uno de los periodos de registro. Suponga además que en cada periodo t con probabilidad π_i , el activo i no se transa. Además esta probabilidad permanece constante y, por lo tanto, no depende de $r_{i(t)}$. De esta forma, para cada activo i en cada periodo t existe una rentabilidad observada $r_{i(t)}^o$. Esta rentabilidad observada depende de si el activo se transa o no en cada periodo y de las rentabilidades virtuales de dicho activo. Si el activo en el periodo t no se transa la rentabilidad observada es cero y si se transa la rentabilidad observada debe ser igual a la suma de todas las rentabilidades pasadas inmediatamente anteriores en las que no se transó. Por ejemplo, si el activo i se transó en el periodo anterior ($t-1$) y la rentabilidad virtual en el periodo t es $r_{i(t)}$, la rentabilidad observada $r_{i(t)}^o$ será igual a $r_{i(t)}$ si el activo se transa en t , o será igual a cero si el activo no se transa. Si el activo no se transó en los últimos tres periodos anteriores, la rentabilidad observada en t será $r_{i(t-3)} + r_{i(t-2)} + r_{i(t-1)} + r_{i(t)}$ si el activo se transa e igual a cero si no se transa.

Por otro lado, el precio virtual es

$$P_{i(t)} = P_0 \times \exp(r_1 + r_2 + \dots + r_t) \quad (10)$$

Y, por lo tanto,

$$\ln(P_{i(t)}) - \ln(P_{i(0)}) = X_t - X_0 = R_i(t) = r_1 + r_2 + \dots + r_t \quad (11)$$

Es decir, el precio depende la suma de todas las rentabilidades pasadas. Cuando el activo no se transa el precio observado es igual al observado en el periodo anterior y cuando se transa el precio observado se hace igual al precio virtual. Esto es equivalente a incluir en el precio la suma de las rentabilidades virtuales que sucedieron durante los periodos en los que el activo no se transó.

Sea la rentabilidad acumulada virtual del activo i hasta el instante t

$$R_i(t) = \sum_{\tau=1}^t r_{i(\tau)} \quad (12)$$

Luego, la rentabilidad acumulada observada para el activo i en el instante t es

$$R_i^o(t) = \begin{cases} R_i(t) & \text{si el activo se transa con probabilidad } (1 - \pi_i) \\ R_i^o(t-1) & \text{si el activo no se transa con prob. } \pi_i \end{cases} \quad (13)$$

De esta manera se pueden generar series de precios observados utilizando la relación anterior y generar series de rentabilidades observadas utilizando:

$$r_{i(t)}^o = R_{i(t)}^o - R_{i(t-1)}^o \quad (14)$$

Para estudiar el efecto de trading no sincrónico sobre índices bursátiles se generan rentabilidades virtuales para cada activo a través de procesos generadores de rentabilidades con distribución normal multivariada sin problemas de trading. Luego se introduce el efecto de non trading a cada activo individual dependiendo de su probabilidad de non trading π_i utilizando la metodología presentada anteriormente. Después de realizado este último proceso se pueden utilizar las series multivariadas simuladas de rentabilidades observadas para construir diferentes índices que ahora contienen los efectos del trading no sincrónico².

En este artículo se utiliza esta forma de modelar el trading no sincrónico para estudiar el efecto que este tiene sobre la aplicación del test de ratio de varianza a índices bursátiles y sobre la autocorrelación de los portafolios. Cabe señalar que este modelo podría ser utilizado para estudiar otros temas, como por ejemplo la incidencia del trading no sincrónico sobre la selección de portafolios, estimación de parámetros, entre otros. Este modelo utiliza escasos supuestos. No se asume un modelo de equilibrio de precios como lo hacen (Atchinson, Butler, & Simonds, 1987), (Lo & MacKinlay, 1990), y (Boudoukh, Richardson, & Whitelaw, 1994). Este modelo permite estudiar los problemas considerando tamaños de muestras finitas sin asumir conductas asintóticas.

Para apreciar el efecto conjunto que tiene el trading no sincrónico y de portafolio sobre la inferencia del test de ratio de varianza cuando el tamaño de la muestra es finito, se construyen diferentes portafolios considerando, inicialmente, dos activos financieros. Solamente a uno de los activos individuales se le introduce non trading. Posteriormente, se realiza una estimación de la autocorrelación en las rentabilidades semanales inducida por trading no sincrónico utilizando un portafolios de seis activos con características heterogéneas similares a las utilizadas en Boudoukh, Richardson, & Whitelaw (1994).

DESARROLLO DE INVESTIGACIÓN

Principales resultados de los efectos de trading y portafolio en el test VR

La estimación se realiza utilizando simulación de Montecarlo usando MATLAB. Empleando un proceso generador de rentabilidades normal multivariado de dimensión dos se generan rentabilidades virtuales compuestas continuamente correspondientes a “n” periodos que tienen una correlación ρ entre ambos activos. Se aplica el efecto de non trading solamente a la serie de rentabilidades del segundo activo financiero (que se asume que representa las rentabilidades de firmas pequeñas). Se construyen series de rentabilidades de índices utilizando:

$$r_{p(t)}^o(\alpha) = (1 - \alpha)r_{1(t)}^o + \alpha r_{2(t)}^o \quad (15)$$

² Para una detallada explicación ver ANEXO 1.

Se generan 10000 trayectorias de rentabilidades observadas con el efecto de trading no sincrónico y a cada una de las trayectorias del respectivo índice se aplica el test de ratio de varianza.

En este proceso multivariado generador de rentabilidades se asume que las medias de las rentabilidades son $\mu = [0.005, 0.005]$ que la desviación estándar del activo sin non trading es 0.005 y la del activo con non trading es 0.02.

La Figura 1 muestra el porcentaje de veces que se rechaza la hipótesis nula en el test de ratio varianza considerando diferentes grados de correlación entre los dos activos considerados y diferentes portafolios o índices. Nótese que para cada valor de α tenemos un portafolio o índice bursátil diferente. Este grafico muestra que cuando se introduce el efecto de non trading a uno de los activos el test de ratio varianza rechaza la hipótesis nula con fuerza para una gran variedad de tipos de portafolios. El rechazo a la hipótesis nula es muy fuerte cuando la correlación entre los activos es negativa, prácticamente no hay rechazo a la hipótesis nula cuando la correlación entre activos es cercana a cero y se hace crecientemente importante para algunos portafolios cuando la correlación se hace cada vez más positiva o cercana a uno. La sensibilidad del test de ratio varianza es muy fuerte a los efectos de portafolio y non trading para diferentes valores de correlación entre activos. En el único caso que parece no afectado es el caso en el que la correlación entre activos es cercana a cero.

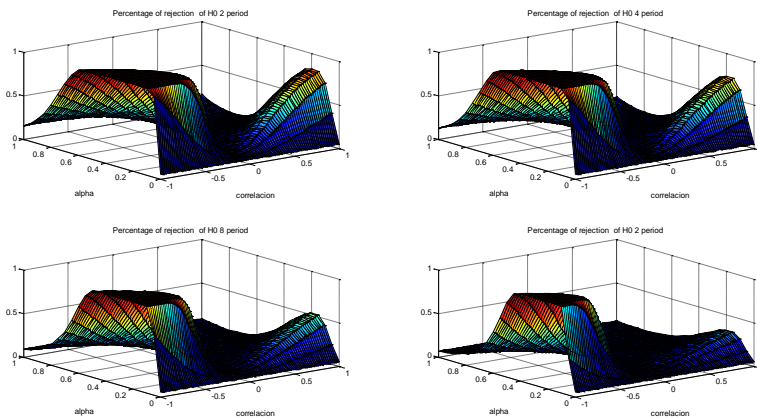


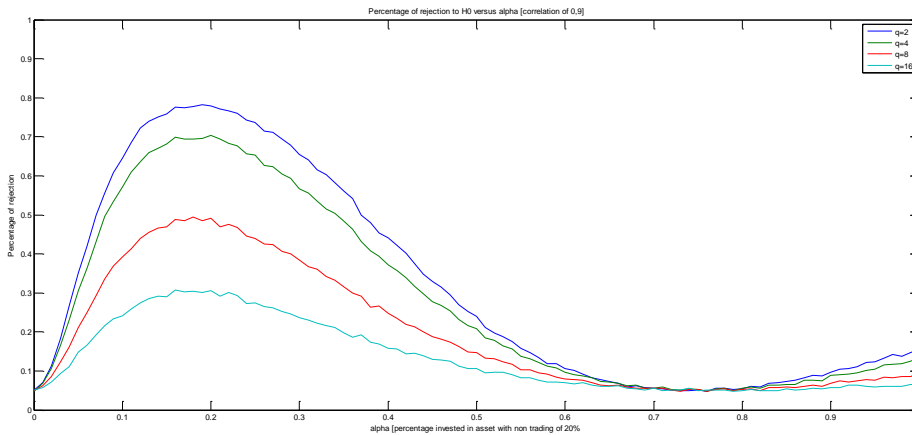
Figura N°1 Efecto portafolio y non trading

Fuente Elaboración Propia

Dado que normalmente la correlación entre activos financieros es cercana a uno, a partir aquí nos focalizamos en analizar el efecto de non trading y de portafolio para el caso en que la correlación entre activos es igual a 0,9. Caso que se considera representativo de la situación actual.

La Figura 2 muestra los resultados obtenidos al restringir el valor de la correlación entre activos a un valor igual a 0,9. La línea azul representa el porcentaje de veces que se rechaza la hipótesis nula para el test de ratio de varianzas con $k=2$, la línea verde para $k=4$, la línea roja para $k=8$, y la línea magenta para k igual a 16 periodos.

Figura 2

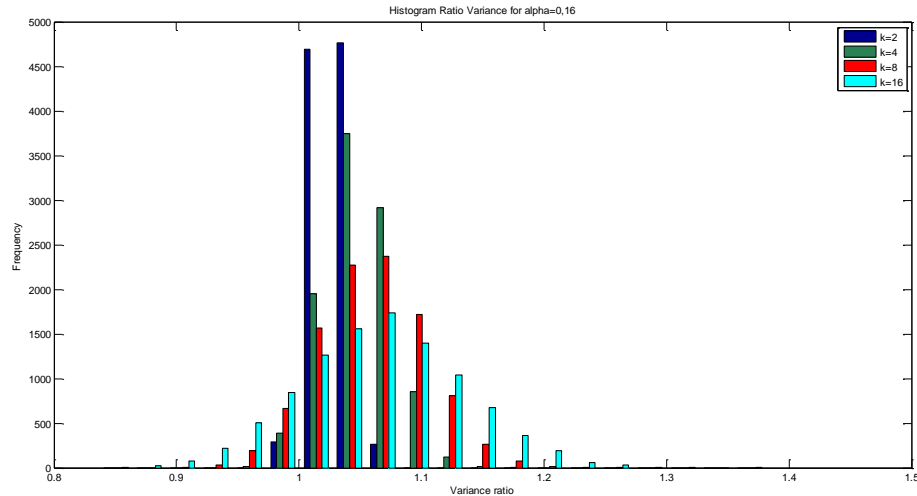


Fuente: Elaboración Propia

Los resultados muestran que el valor máximo de la tasa de rechazo del test de ratio de varianzas se produce para $\alpha \approx 0.16$ y también se aprecia un alto porcentaje de rechazo para α igual a 1. Los motivos de rechazo para $\alpha=0.16$ se deben a auto correlación positiva y los de $\alpha=1$ se deben a autocorrelación negativa. Dado que lo normalmente observado en los test empíricos es que el rechazo a la hipótesis nula de camino aleatorio de índices se deben a autocorrelación positiva, el caso en que $\alpha=1$ no se sigue analizando.

Para ilustrar como se distribuyen los valores del estadístico de ratio de varianzas de las 10000 trayectorias simuladas se muestra el histograma generado para $\alpha=0.16$.

Figura 3



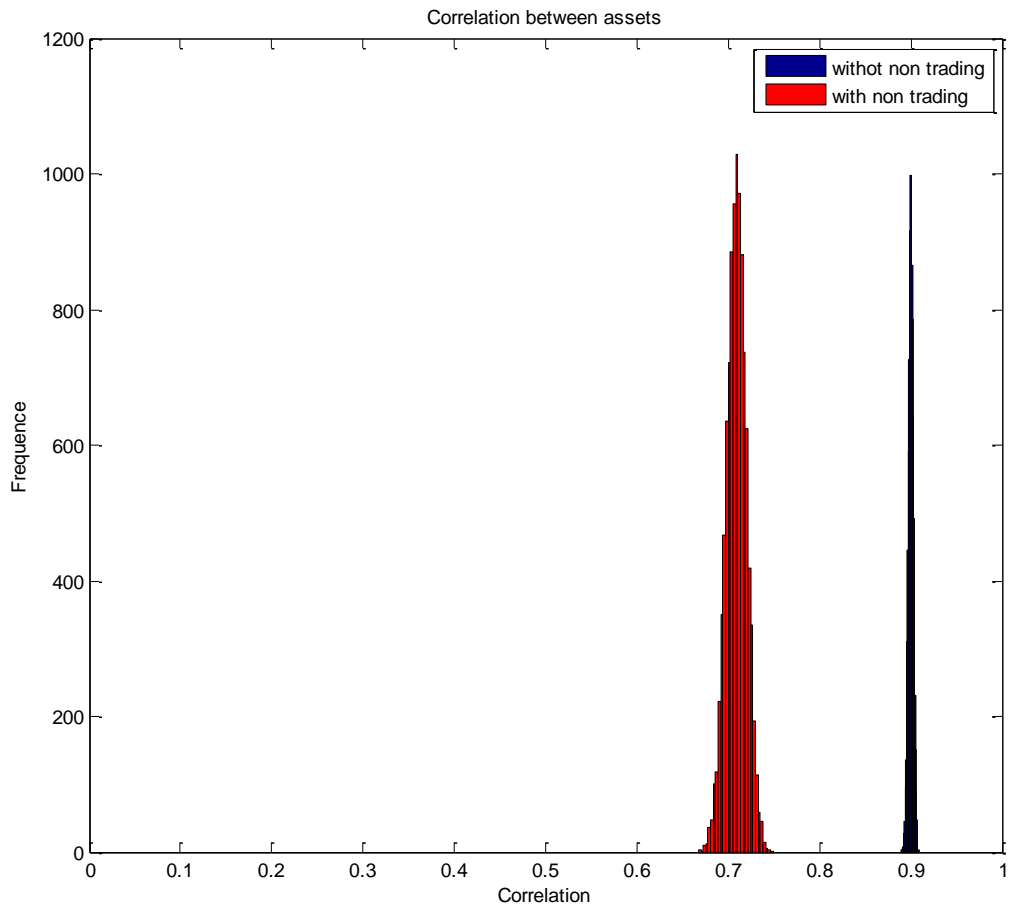
Fuente: Elaboración Propia

Aunque el valor promedio del ratio de varianza para $k=2$ es 1.07, en un promedio de 25% de las veces el ratio de varianza es mayor que 1,1.

Como se puede apreciar si se considera la conducta asintótica del test de ratio de varianza aplicado a una serie con efectos de trading no sincrónico a un porfolio compuesto en un 16% por un activo con un non trading y un 84% de un activo que transa regularmente en todos los periodos se tendrá sobre un 50% de posibilidad de rechazar la hipótesis nula. Sin embargo, el test es aplicado en la práctica a una sola serie y como muestra la Figura 3 es posible que el test de ratio de varianza sea rechazado con ratios de varianza superiores a 1,2. Lo cual es similar al caso observado en el Cuadro 2 donde se muestra el rechazo a la hipótesis nula de camino aleatorio para el índice CRSP NYSE AMEX Equal Weighted.

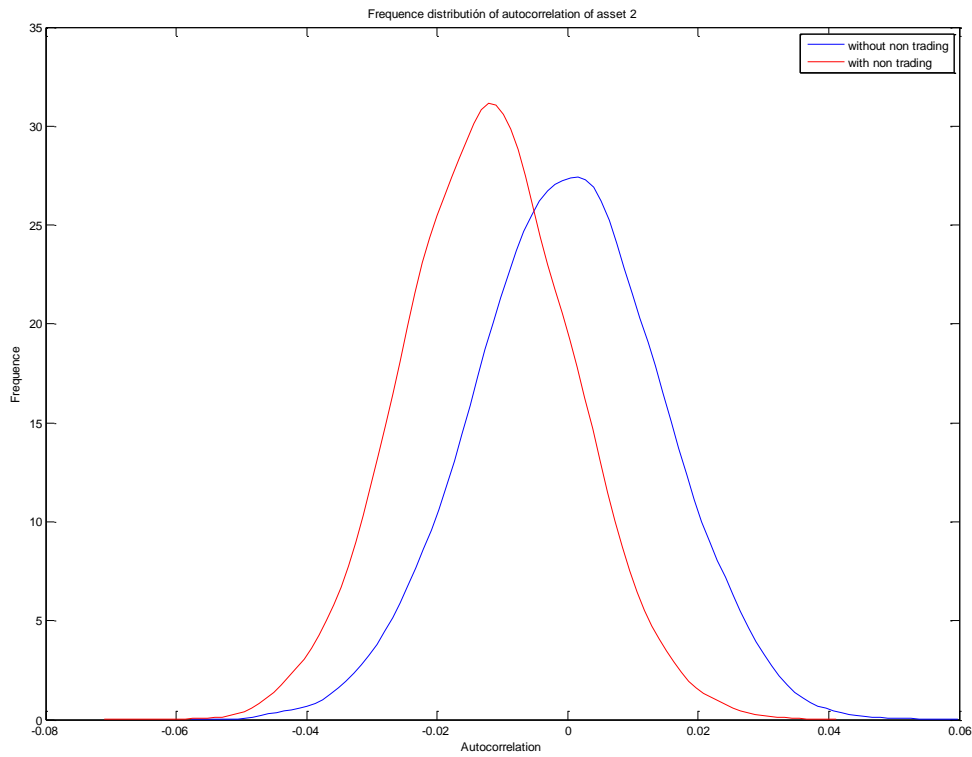
Para visualizar los posibles efectos que tiene el efecto de non trading en un activo individual sobre la correlación observada, se procede a simular 100.000 trayectorias de series de rentabilidades normales multivariadas de 5000 observaciones cada una. Las simulaciones son generadas con una correlación entre rentabilidades igual a 0,9. La Figura 4 muestra el histograma de la correlación observada sin efecto de non trading (color azul) que tiene como media 0,9 y desviación estándar 0,006. También muestra el histograma de la correlación entre los activos cuando a una de las rentabilidades se le introduce el efecto non trading con una probabilidad de non trading igual 20%. En este último caso la correlación promedio es 0,689 y su desviación estándar es 0,0271. Cabe señalar que las correlaciones que en la práctica calculamos contienen los efectos del trading no sincrónico y, por ello, se puede afirmar que las correlaciones observadas son estimaciones sesgadas hacia debajo de las verdaderas correlaciones entre activos.

Figura 4



Fuente: Elaboración Propia

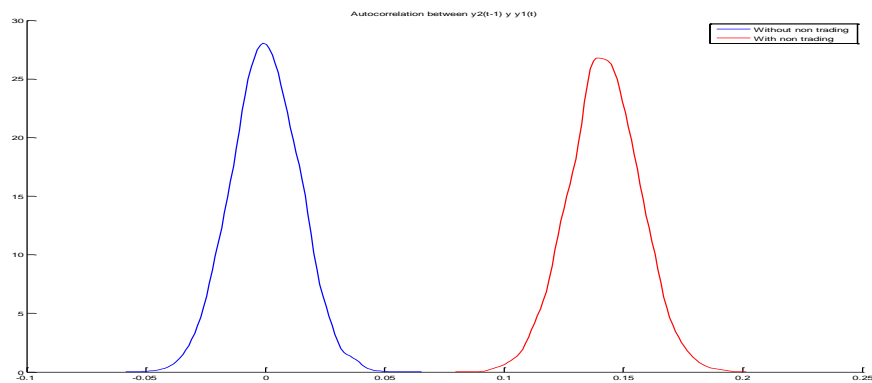
Figura 5



Fuente: Elaboración Propia

La Figura 5 muestra que la autocorrelación observada en un activo con non trading se hace levemente negativa. La autocorrelación observada para un activo con y sin efectos de non trading. La autocorrelación promedio sin non trading es -0.001 y la con non trading es -0.0453.

Figura 6



La Figura 6 muestra la autocorrelación cruzada entre la rentabilidad $r_2(t-1)$ (con non trading) y $r_1(t)$ (sin non trading). Con la línea azul se muestra la autocorrelación cuando no hay non trading y la línea roja la función de densidad de probabilidades de esta correlación con non trading. La autocorrelación cruzada promedio sin non trading es aproximadamente cero y la con non trading es en promedio 14,2%.

Haciendo sentido de los resultados del experimento

Como se ha dicho anteriormente el probar la hipótesis nula de camino aleatorio para un índice bursátil a través del test de ratio de varianza es equivalente a probar si las autocorrelaciones del portafolio son distintas de cero. Como se ha observado, el rechazo en la hipótesis nula en índices, en general, se debe a autocorrelación positiva.

Para ilustrar cómo en trading no sincrónico puede inducir autocorrelación positiva en los portafolios considere la siguiente expresión para la autocorrelación de un portafolio:

$$corr(r_{p(t)}, r_{p(t-1)}) = \frac{cov(r_{p(t)}, r_{p(t-1)})}{V(r_{p(t)})} \quad (16)$$

Donde

$$r_{p(t)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_{i(t)} \text{ sujeto a } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

Por lo tanto

$$corr(r_{p(t)}, r_{p(t-1)}) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 cov(r_{i(t)}, r_{i(t-1)}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_i \alpha_j cov(r_{i(t)}, r_{j(t-1)})}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 V(r_{p(t)}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_i \alpha_j V(r_{i(t)}, r_{j(t)})} \quad (17)$$

Si consideramos el caso de solamente de un índice con solo dos activos se tiene

$$\begin{aligned} & corr(r_{p(t)}, r_{p(t-1)}) \\ &= \frac{\alpha^2 cov(r_{1(t)}, r_{1(t-1)}) + (1-\alpha)^2 cov(r_{2(t)}, r_{2(t-1)}) + \alpha(1-\alpha)cov(r_{1(t)}, r_{2(t-1)}) + \alpha(1-\alpha)cov(r_{2(t)}, r_{1(t-1)})}{\alpha^2 V(r_{1(t)}) + (1-\alpha)^2 V(r_{2(t)}) + 2\alpha(1-\alpha)cov(r_{1(t)}, r_{2(t)})} \end{aligned} \quad (18)$$

Si tenemos que las rentabilidades del activo 1 ($r_{1(t)}$) y las rentabilidades del activo 2 ($r_{2(t)}$) tienen una correlación igual a 0,9, pero que las autocorrelaciones y correlaciones intertemporales de un periodo cruzadas son cero, entonces la autocorrelación del portafolio es cero.

Para ver como incide el trading no sincrónico le introducimos non trading al activo 2 solamente y observamos lo que pasa con los valores estimados de algunos de los más importantes parámetros de las rentabilidades de los portafolios. Se ha supuesto que las rentabilidades

compuestas continuamente virtuales (sin efectos de trading no sincrónico) tienen distribución normal multivariada.

$$N(\mu, V) = N\left(\begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.005^2 & 0.9 \times 0.005 \times 0.02 \\ 0.9 \times 0.005 \times 0.02 & 0.02^2 \end{bmatrix}\right)$$

Hemos generado 10000 trayectorias de largo de 5000 periodos cada una y se han calculados los valores promedio de las autocorrelaciones y correlaciones cruzadas de los activos individuales en promedio son iguales a cero y que las varianzas y correlaciones entre activos permanecen iguales.

A continuación realizamos el mismo ejercicio, pero introduciendo un non trading de 20% al activo 2.

Cuadro 3

	σ_1	σ_2	$\rho_{1(t),2(t)}$	$\rho_{1(t),2(t-1)}$	$\rho_{2(t),1(t-1)}$	$\rho_{1(t),1(t-1)}$	$\rho_{2(t),2(t-1)}$
Sin non trading	0.005	0.02	0.9	0	-0.0009	0	-0.0011
Con non trading	0.005	0.0212	0.689	-0.0008	0.1349	0	-0.0453

Fuente: Elaboración Propia

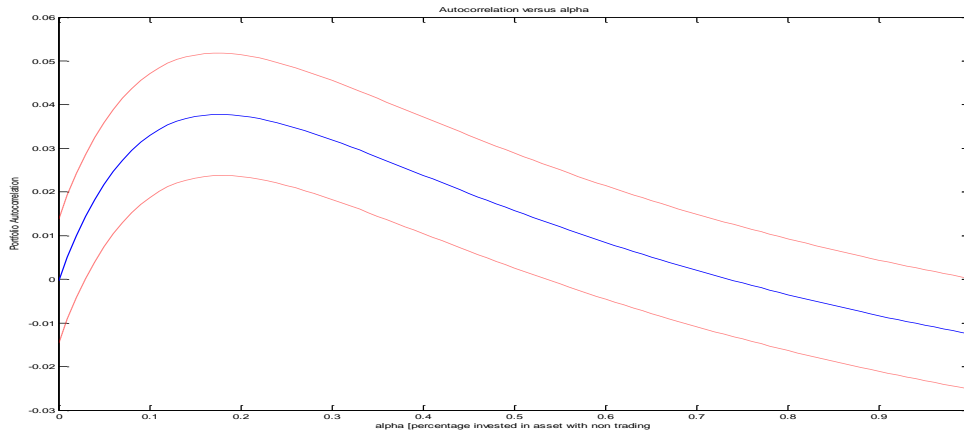
Como se puede apreciar en el Cuadro 3 el non trading en el activo 2 provoca un leve aumento en la desviación estándar del activo 2, una disminución en la correlación de los activos (de 0,8999 a 0,6789), significativo aumento en la correlación entre la rentabilidad del activo 2 y la rentabilidad rezagada del activo 1 (de -0,0009 a 0.1349) y una autocorrelación negativa en el activo 2.

Para el caso con non trading se aprecia que la correlación entre la rentabilidad del activo con non trading y la rentabilidad rezagada del activo sin trading [$\rho_{2(t),1(t-1)}$] es un término positivo que aparece en el numerador de la ecuación 18 de autocorrelación del índice en conjunto con la autocorrelación negativa del activo con trading. Por lo tanto, dependiendo de cómo se construya el índice (los valores de α_i) el efecto inducido de correlación positiva debido al non trading será más o menos fuerte.

Con el ejemplo anterior se ha demostrado que el trading no sincronizado puede inducir autocorrelación negativa en los activos individuales, puede provocar autocorrelación cruzada positiva entre los activos, y en términos netos, puede inducir a autocorrelación positiva en los índices accionarios.

Figura 7

Autocorrelation of portfolio versus Percentage invested in asset with non-trading. The continue line represent medium values and the dashed lines the medium values +/- the standard deviation of the portfolio autocorrelation



Fuente: Elaboración Propia

La Figura 7 muestra que la autocorrelación inducida por el trading no sincrónico es apreciablemente mayor que cero para algunos porfolios. Este fenómeno se manifiesta con mayor fuerza cuando el número de activos considerados aumenta.

Estimación de autocorrelación de rentabilidades semanales. Caso con seis activos.

A continuación se realiza la estimación de la autocorrelación teórica inducida por trading no sincrónico considerando porfolios de seis activos que tienen características heterogéneas y que tienen las probabilidades de non trading iguales a las utilizadas en Boudoukh, Richardson, & Whitelaw (1994). Con estas probabilidades de non trading diarios se generan rentabilidades diarias con los efectos del non trading. Luego se calculan las rentabilidades semanales como la suma de 5 rentabilidades diarias y con estas rentabilidades semanales se estiman las autocorrelaciones de diversos porfolios. En el Cuadro 4 se muestran los vaores de los parámetros utilizados. Se han generado 10.000 muestras de rentabilidades diarias un un largo de 5.000 cada una.

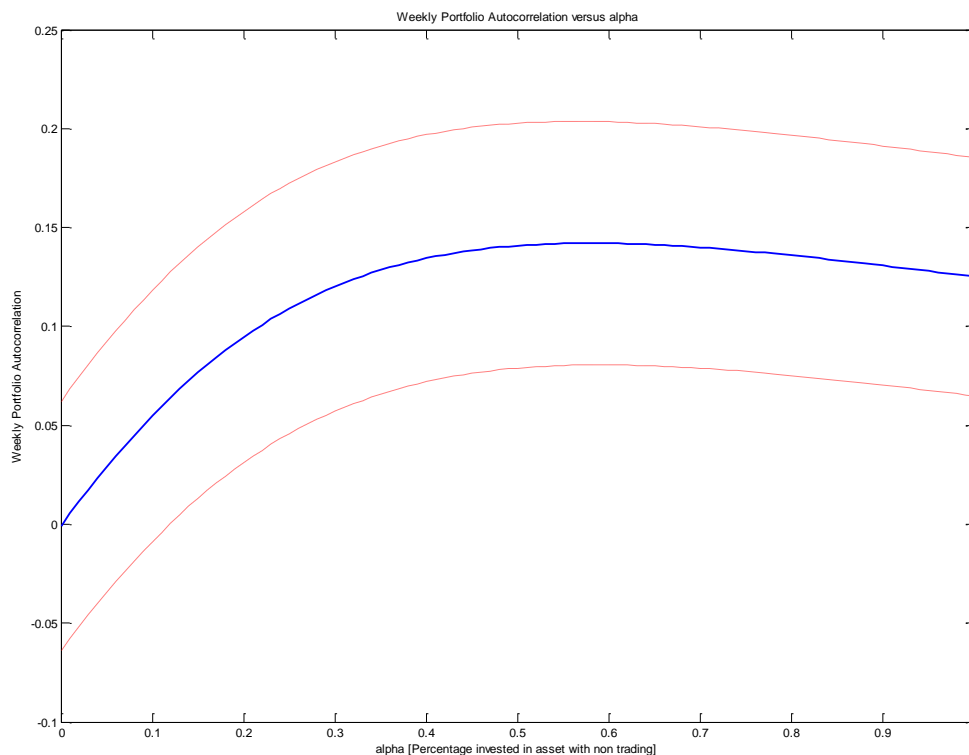
Cuadro 4

Asset	Non Trading daily	Return	Volatility	Correlation Matrix					
1	0%	0,5%	0,5%	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
2	0%	0,5%	1%	0.9	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9
3	0%	0,5%	1,5%	0.9	0.9	1.0	0.9	0.9	0.9
4	43%	0,5%	2%	0.9	0.9	0.9	1.0	0.9	0.9
5	60%	0,5%	2,5%	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	0.9
6	85%	0,5%	3%	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0

En la Figura 8 se muestra la autocorrelación inducida mensual por non trading para portfolios contruidos con seis activos. Las probabilidades de non trading diarios utilizadas son las mismas usadas en Boudoukh, Richardson, & Whitelaw (1994, pág. 558).

Figura 8

Weekly autocorrelation of portfolio versus Percentage invested in asset with non-trading. The continue line represent medium values and the dashed lines the medium values +/- the standard deviation of the portfolio autocorrelation.



Como se puede apreciar la autocorrelación semanal manifiesta la existencia de un efecto portfolio. Sin embargo, ahora es posible observar portfolios en los que la autocorrelación semanal inducida por trading no sincrónico puede alcanzar valores de hasta un 20% para algunos portfolios y autocorrelaciones inferiores a un -5% para otros portfolios.

Dado lo anterior se puede señalar que el efecto conjunto de portfolio y de trading no sincrónico pueden explicar las altas autocorrelaciones observadas en el índice igualmente ponderado CRSP NYSE AMEX Equal Weighted y las no significativamente distintas de cero observadas en índice ponderado por valor de mercado CRSP NYSE AMEX Value Weighted.

CONCLUSIONES

El efecto del trading no sincrónico puede inducir valores de autocorrelaciones semanales positivas superiores a 20 por ciento para algunos portafolios y cero para otros portafolios. Es decir, la autocorrelación inducida por non trading afecta de diferente forma a diferentes índices bursátiles. Esto puede explicar las diferencias en los resultados de aplicar el test de ratio varianza al índice **CRSP NYSE AMEX Equal weighted** y al **CRSP NYSE AMEX Value weighted**. El efecto del trading no sincrónico aumenta con el número de activos y con la heterogeneidad de los activos que componen el portafolio.

BIBLIOGRAFÍA

- Atchinson, M., Butler, K., & Simonds, R. (1987). Nonsynchronous Security Trading and Market Index Autocorrelatio. *The Journal of Finance* , Vol. XLII. N°1 pp.112-118.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la Speculation. *Paris: Gauthier-Villars* .
- Barberis, N. (2000). Investing for the long run when return are predictable. *Journal of Finance* , 55 225-264.
- Campbell , J., Lo, A., & Mackinlay, C. (1997). *The Econometrics of Financial Market*. New jersey: Princeton University Press.
- Campbell, J. Y., & Viceira, L. M. (1999). Consumption and Portfolio Decisions when Expected Return are time Varing. *Quarterly Journal of Economics* , 114(2) 433-496.
- Cecchetti, S., & Lam, P. (1994). Variance ratio test: Small sample properties with an application to international output data. *Journal of Business and Economic Statistics* , 12: 177-186.
- Charles, A., & Darné, O. (2009). Variance-Ratio Test of Random Walk: An Overview. *Journal of Economic Surveys* , Vol. 23, N°3, pp. 503-527.
- Chen , W., & Deo, R. (2006). Variance ratio statistic at large horizons. *Econometric Theory* , 22: 206:234.
- Chow, K., & Denning, K. (1993). A simple multivariate test. *Journal of Econometrics* , 58: 385:401.
- Epps, T. (1979). Comovement in Stock Prices in the very Short Run. *Journal of the American Statistical Association* , Vol. 74, N° 366 pp. 291-298.
- Fama, E. (1970). Efficient Capital Markets: A review of theory and empirical work. *The Journal of Finance* , 383-417.

- Fama, E. (1991). Efficient Capital Markets: II. *The Journal of Finance* , December, Vol. XLVI, N°5 1575-1617.
- Fama, E. (1965). The behaviour of stock market prices. *Journal of Business* , 38 34-105.
- Fisher, L. (1966). Some New Stock Market Indexes. *Journal of Business* , 191-225.
- Grossman, S., & Stiglitz, J. (1980). On the impossibility of informationally efficient markets. *American Economic Review* , 70, 393-408.
- Jensen, M. (1978). Some anomalous evidence regarding market efficiency . *Journal of Financial Economics* , 6, 95-101.
- Kan, R. (2006). Exact variance ratio test with overlapping data. *Working Paper, Universidad de Toronto* .
- Kanellopoulou, S., & Panas, E. (2008). Empirical distribution of stock returns: Paris stock market,1980-2013. *Applied Financial Economics* , 18, 1289-1302.
- Kim. (2006). Wild bootstrapping variance ratio tests. *Economics Letters* , 92: 518-532.
- Lo , A., & MacKinlay, A. (1990). An Econometric analysis of nonsynchronous trading. *Journal of Econometrics* , 181-211.
- Lo, A., & MacKenlay, A. (1988). Stock Market Prices do not Follow Random Walks: Evidence From a Simple Specification Test. *Review of Financial Studies* , 41-66.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business* , 394-419.
- Merton, R. (1969 (b)). Lifetime Portfolio Selection under uncertainty: The continuous case. *Review of Economic and Statistic* , 247-257.
- Merton, R. (1969). Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous Time Case. *Review of Economic and Statistics* , 51, August 247-257.
- Osborne, M. (1959). Broenian Motion in the Stock Market. *Operation Research* , VII (March-April) 145-173.
- Richardson , M., & Smith, T. (1991). Test of financial models in presence of overlapping observations. *Review of Financial Studies* , 4: 227:254.
- Roberts, H. (1967). *Statistical versus clinical prediction of the stock market*. Chicago: Unpublished manuscript Center for Research in Security Prices, University of Chicago.
- Samuelson, P. (1969). Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming. *Review of Economic Statistical* , 239-246.
- Wang , Y., & Kim, J. (2003). A multiple variance ratio test using subsampling. *Economics Letters* , 79: 225-230.

White, H. (1980). A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and Direct Test for Heteroskedasticity. *Econometrica* , Vol.48, N° 4 , May pp. 817-838.

Wright, J. (2000). Alternative variance ratio test using rank and signs. *Business and Economic Statistics* , 18: 1-9.

Anexo 1

Precio Virtual	P_0	P_1	P_2	\dots	P_{t-3}	P_{t-2}	P_{t-1}	P_t
Precio Observado	P_0^o	P_1^o	P_2^o		P_{t-3}^o	P_{t-2}^o	P_{t-1}^o	P_t^o

Considere

$$P_0^o = P_0 \quad (I1)$$

que

Si en el periodo 1 el activo es transado su precio observado será P_1 y si no es transado el precio observado será igual al precio del periodo anterior P_0 .

Es decir,

$$P_1^o = \begin{cases} P_0 = P_0^o, & \text{con probabilidad } \pi \\ P_1, & \text{con prob. } (1 - \pi) \end{cases} \quad (I2)$$

La rentabilidad observada en el periodo 1 es

$$r_1^o = \begin{cases} 0, & \text{con probabilidad } \pi \\ r_1, & \text{con prob. } (1 - \pi) \end{cases} \quad (I3)$$

La rentabilidad acumulada hasta el periodo 1 es:

$$R_1^o = \begin{cases} 0, & \text{con probabilidad } \pi \\ R_1 = r_1, & \text{con prob. } (1 - \pi) \end{cases} \quad (I4)$$

El precio observado en el periodo 2 será P_2 si el activo se transa o será igual al precio observado en el periodo anterior si el activo no se transa.

Es decir,

$$P_2^o = \begin{cases} P_1^o, & \text{con probabilidad } \pi \\ P_2, & \text{con prob. } (1 - \pi) \end{cases} \quad (I5)$$

Donde P_1^o es determinado por la expresión (I2)

La rentabilidad observada en el periodo 2 es

$$r_2^o = \begin{cases} 0 & \text{con prob. } \pi \\ r_2 & \text{con prob } (1 - \pi)\pi \\ r_1 + r_2 & \text{con probabilidad } (1 - \pi)^2 \end{cases} \quad (I6)$$

La rentabilidad acumulada hasta el periodo 2 es:

$$R_2^o = \begin{cases} R_1^o, & \text{con probabilidad } \pi \\ R_2 = r_1 + r_2, & \text{con prob. } (1 - \pi) \end{cases} \quad (I7)$$

El precio observado en el periodo t será:

$$P_t^o = \begin{cases} P_{t-1}^o, & \text{con probabilidad } \pi \\ P_t, & \text{con prob. } (1 - \pi) \end{cases} \quad (I8)$$

La rentabilidad observada en el periodo t

$$r_t^o = \begin{cases} 0 & \text{con prob } \pi \\ r_t & \text{con prob. } (1 - \pi)^2 \\ r_t + r_{t-1} & \text{con prob. } (1 - \pi)^2 \pi \\ r_t + r_{t-1} + r_{t-2} & \text{con prob } (1 - \pi)^2 \pi^2 \\ \vdots & \vdots \\ r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k} & \text{con prob } (1 - \pi)^2 \pi^k \end{cases} \quad (I9)$$

La rentabilidad acumulada hasta el periodo 2 es:

$$R_t^o = \begin{cases} R_{t-1}^o, & \text{con probabilidad } \pi \\ R_t = r_1 + r_2 + \dots + r_t, & \text{con prob. } (1 - \pi) \end{cases} \quad (I10)$$

Como se puede ver la relación recursiva de determinación de precios observados y de rentabilidades acumuladas observadas es más fácil de determinar que el de la rentabilidad observada.

Para efectos de simular las rentabilidades observadas para un activo financiero con probabilidad de non trading igual a π se debe inicialmente simular las rentabilidades virtuales para N periodos $r_1 + r_2 + \dots + r_N$. Luego determinar las rentabilidades acumuladas virtuales

$$R_t = \sum_{i=1}^t r_i \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, N \quad (I11)$$

Luego, se introduce el efecto de non trading asignando para cada periodo el valor de R_t^o . Primero se calcula el valor de R_t^o generando el valor de una variable aleatoria w_t con distribución uniforme $U[0,1]$ y si el valor de w_t es menor que π el activo no se transa y su rentabilidad acumulada es igual a la rentabilidad observada acumulada hasta (t-1) y el valor de w_t es mayor que π entonces el activo se transa en t y su rentabilidad acumulada observada es igual a la rentabilidad virtual R_t